РЕШЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Кожокарь Ю.В., Крощенко А.А.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Рассматривается краевая непериодическая задача Дуффинга вида:

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma(y(x))^n = F(x)\,,\quad \gamma\neq 0\,, \tag{1}$$

с краевыми условиями 1-го или 3-го рода:

$$\begin{cases} y(a)=A \\ y(b)=B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=A \\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=B \end{cases} \tag{2}$$

Задача решалась с помощью одношаговых и многошаговых методов неполного/полного прогноза при произвольных начальных приближениях.

В качестве тестового примера мы использовали задачу вида:

$$y''(x)+y'(x)+y(x)+(y(x))^3=e^{-x}+e^{-3x},\quad 0\le x\le 2,\ \ y(0)=1,\ \ y(2)=e^{-2} \tag{3}$$

Для аппроксимации 1-й и 2-й производных использовался метод неопределенных коэффициентов для многоточечной аппроксимации производных [1]. В качестве точек аппроксимации были выбраны корни полинома Чебышева I-го рода $x_i,\ i=\overline{0,n}$. В результате из системы (4) находятся коэффициенты аппроксимации $c_i,\ i=\overline{0,n}$:

$$\begin{cases} c_0+c_1+\ldots+c_n=0, \\ c_0x_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{k-1}+c_1x_1^{k-1}+\ldots+c_nx_n^{k-1}=0, \\ c_0x_0^{k}+c_1x_1^{k}+\ldots+c_nx_n^{k}=k!, \\ c_0x_0^{k+1}+c_1x_1^{k+1}+\ldots+c_nx_n^{k+1}=(k+1)!\,x_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{n}+c_1x_1^{n}+\ldots+c_nx_n^{n}=n(n-1)\ldots(n-k+1)x_i^{n-k}. \end{cases} \tag{4}$$

Полученные коэффициенты используются для конструирования производных по общей формуле: $y^{(k)}(x_i)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_iy_i$, k – порядок производной

При подстановке аппроксимаций производных в общую задачу (1), получается нелинейная относительно y_i численная система вида:

$$\sum_{j=0}^{n}y_j(c_j^2+\alpha c_j^1)+\beta y_i+\gamma y_i^n=F(x_i),\quad i=\overline{1,n-1}, \tag{5}$$

где c_j^1 и c_j^2 - это коэффициенты аппроксимации соответствующих первой и второй производных. Недостающих два условия находятся из заданных краевых условий.

Для решения нелинейной системы вида $f(y)=0$ использовалась следующая схема [3]:

1. Решалась СЛАУ относительно Δy_l с использованием метода Гаусса с выбором главного элемента [2]:

$$\left(\alpha\beta_l^2\,\|f(y_l)\|^2E+\overline{f'(y_l)}f'(y_l)\right)\Delta y_l=-\overline{f'(y_l)}f(y_l),\ l=0,1,2,\ldots,\beta_0\in[10^{-3},10^{-1}],\alpha<<1,$$ где

$f=(f_0,f_1,\ldots,f_n),\ \ y_l=(y_l^0,y_l^1,\ldots,y_l^n),\ \ y_l^j$ – l-тое приближение к j-той компоненте;

2. Вносились поправки в вектор y_l: $y_{l+1} = y_l + \beta_l \Delta y_l,\ l = 0,1,2,...$;

3. Проверялось условие: если $\| f(y_{l+1})\| < \varepsilon$, где ε - малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4;

4. Определялась новая шаговая длина по приведенным ниже четырем формулам и осуществлялся переход на шаг 1.

Наиболее эффективными алгоритмами просчета шаговой длины оказались следующие нелокальные одношаговые/многошаговые методы полного/неполного прогноза [3]:

1. $\beta_{l+1} = \min\left(1,\ \dfrac{\gamma_l \| f(y_0)\|}{\beta_l\left(\| f(y_l + \Delta y_l)\|\right)}\right); \gamma_{l+1} = \dfrac{\gamma_l \| f(y_{l+1})\| \| f(y_{l+1} + \Delta y_{l+1})\|}{\| f(y_l + \Delta y_l)\| \| f(y_{l+2})\|}; \gamma_0 = \dfrac{\beta_0^2 \| f(y_0 + \Delta y_0)\|}{\| f(y_1)\|}$

2. $\beta_l = \max\left(\theta,\ \dfrac{\| f(y_l)\|^2}{\| f(y_l)\|^2 + \| f(y_l + \Delta y_l)\|^2}\right); \quad \beta_{-1} \in [10^{-3},1],\ \theta \in [0.01, 0.1]$

3. $\beta_{l+1} = \min\left(1,\ \dfrac{\gamma_l \| f(y_l)\|}{\beta_l\left(\| f(y_{l+1})\|\right)}\right);\ \gamma_{l+1} = \dfrac{\gamma_l \| f(y_l)\|}{\| f(y_{l+1})\|}; \quad \beta_0 \in [10^{-2}; 0,5],\ \gamma_0 = \beta_0^2$

4. $\beta_{l+1} = \min\left(1,\ \dfrac{\gamma_l \| f(y_0)\|^2}{\beta_l\left(\| f(y_l)\|^2 + \| f(y_{l+1})\|^2\right)}\right); \qquad \gamma_{l+1} = \dfrac{\gamma_l \| f(y_l)\|^2\left(\| f(y_{l+1})\|^2 + \| f(y_{l+2})\|^2\right)}{\| f(y_{l+2})\|^2\left(\| f(y_l)\|^2 + \| f(y_{l+1})\|^2\right)};$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2\left(\| f(y_0)\|^2 + \| f(y_1)\|^2\right)}{\| f(y_1)\|^2}.$$

В результате применения рассмотренных выше методов для решения задачи (1)-(2), мы получаем каркас приближенного решения в виде набора значений функции в узлах – корнях полинома Чебышева.

Далее восстанавливаем в аналитическом виде приближенное решение с помощью формул:

$$y(x) \approx P_m(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} c_k T_k\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right),\ c_k = \frac{2}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{y}(x_j) T_k\left(\frac{2x_j - b - a}{b - a}\right),\ k = \overline{0, m},\ m \le n,$$

где в качестве x_j выбирались корни полинома Чебышева I-го рода, а $\tilde{y}(x_j)$ $\left(j = \overline{1, n-1}\right)$ - сеточное решение.

Численный эксперимент и его обсуждение

На основании численного эксперимента можно сделать ряд выводов.

Установлено, что непериодическая задача типа Дуффинга весьма чувствительна к начальным приближениям. Чем вероятнее, что область начальных приближений близка к области притяжения метода, тем лучше и быстрее сходится тот или иной метод. Кроме того, в связи с достаточно плотной сеткой значений x_i $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ уже при нахождении коэффициентов аппроксимации производных наблюдается потеря точности на этапе решения СЛАУ. Соответственно, при нахождении нормы невязки, она нередко становится большой. Замечено, что многошаговые методы полного прогноза «работают» хуже одношаговых. Среди рассмотренных методов по эффективности работы можно выделить одношаговый метод Ермакова – Калиткина.

Результаты экспериментов для наиболее эффективных многошаговых/одношаговых методов полного/неполного прогноза сведены в таблицу, которая иллюстрирует наши выводы.

№ метода	Число точек аппроксимации производных	Норма до решения СЛАУ (5)	Норма после восстановления
1	30	4,93482E-11	5,88374E-6
	35	3,69375E-10	1,49623E-5
2	30	2,29476E-12	4,68967E-7
	35	8,41605E-11	1,27403E-7
3	30	4,28291E-11	1,15226E-7
	35	9,77257E-12	6,53128E-5
4	30	6,53181E-11	2,58983E-6
	35	2,96981E-11	4,493E-7

Литература

1. Березин, И.С., Жидков, Н.П. Методы вычислений [Текст]. В 2 т. Т. 1. Методы вычислений/И.С. Березин и Н.П. Жидков. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 462 с.
2. Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст]. В 2 т. Т. 1. Линейная алгебра и нелинейные уравнения/В.М. Вержбицкий. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 432 с.
3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений [Текст]: монография/В.М. Мадорский. – Брест: Изд-во БрГУ, 2005. – 186 с.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ В ОТКРЫТЫХ СЕТЯХ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ И С ОБХОДОМ УЗЛОВ ЗАЯВКАМИ

Коробейникова Е.В.

Гомельский государственный технический университет имени П.О.Сухого, г. Гомель

В сеть, состоящую из N однолинейных узлов, поступает стационарный пуассоновский поток заявок интенсивности λ. В *l*-м узле находится один прибор , который может работать в τ_i+1 режимах. Состояние *l*-го узла характеризуется парой чисел n $_l = (i_l, j_l)$, где i_l - число заявок в *l*-м узле, j_l-номер режима, в котором работает прибор в *l*-м узле ($l=\overline{1;N}; \quad j_l=\overline{\overline{0,\tau_l}}$).

Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0i} направляется в *i*-й узел ($i=\overline{1,N}; \quad \sum_{i=1}^{N}\pi_{0,i}=1$)

Заявка обслуженная в *l-м* узле, мгновенно с вероятностью $\pi_{l,j}$ направляется в *j*-й узел, а с вероятностью $\pi_{l,0}$ покидает сеть ($i,j=\overline{1,N}; \quad \sum_{i=1}^{N}\pi_{i,j}=1$). Заявка направленная в *i*-й узел (извне или с другого узла), с вероятностью $f^{(i)}(n_i)$ присоединяется к очереди, а с вероятностью $1-f^{(i)}(n_i)$ считается мгновенно обслуженной узлом ($0\le f^{(i)}(n_i)\le 1; \ i=\overline{1,N}$). Длительность обслуживания прибором *l*-го узла, находящегося в состоянии n_l, имеет показательное распределение с параметром $\mu_l(n_l)$, зависящим от состояния (т.е. от числа заявок i_l в узле и режима его работы j_l). Для состояния n_l, время пребывания в режиме j_l имеет показательное распределение , при этом с интен-